

MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 7

Spojitosť funkce:

1. Jsou dány funkce $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o spojitosti funkce $f + g$ a $f \cdot g$ v bodě 0. A vaše tvrzení odůvodněte.
2. Ukažte, že platí: když je $|f(x)| \leq x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0.
3. Ukažte, že platí: jsou-li funkce $f(x), g(x)$ spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $|f(x)|$, $\max\{f(x), g(x)\}$ i $\min\{f(x), g(x)\}$ jsou funkce spojité v bodě a .
4. Může mít Darbouxovu vlastnost (nabývání mezhodnot) i funkce nespojitá na intervalu (a, b) ? A může i funkce nespojitá na intervalu (a, b) zobrazit tento interval na interval?

Derivace funkce:

1. „početní“ příklad:

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte:

$$f(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1}; \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}; \quad \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \quad \sqrt{x^2+1} \arctg(\sin 2x); \quad \cos\sqrt{x}; \quad \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right);$$

2. Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkcí

$$f(x) = |\ln x| \quad \text{a} \quad g(x) = |\ln^3 x| \quad \text{v bodě } x=1.$$

Dokážete výsledek zobecnit?

3. a) Je dána funkce f předpisem :

$$f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a ukažte, že i $f'(x)$ je funkce spojitá v bodě $x_0 = 0$.

- b) Je dána funkce f

$$(i) \quad f(x) = \sqrt{\arctg(x-1)^2} \quad \text{nebo} \quad (ii) \quad f(x) = \cos \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

Najděte definiční obor funkce f . Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.